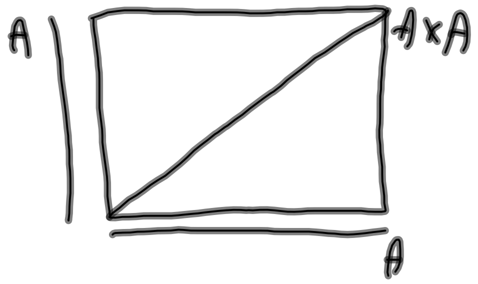
RELACE

Př.: $\emptyset$, $A \times B$

IDENTICKÁ RELACE NA A id_A

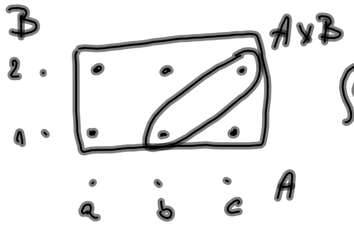
$$id_A = \{(a,b) \in A \times A \mid a = b\}$$



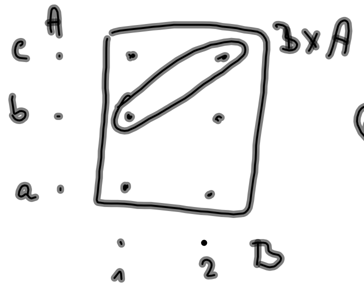
Definice Relace ρ^{-1} mezi množinami B, A definovaná

$$\rho^{-1} := \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in \rho\}$$

se nazývá OPAČNÁ (INVERZNÍ) RELACE k ρ.



$\rho = \{(b,1),(c,2)$



$\rho^{-1} = \{(1,b),(2,c)$

Definice Buď ρ relace mezi A, B, buď σ mezi B, C. Relace $\sigma \circ \rho$ (σ po ρ) mezi A, C definovaná

$$\sigma \circ \rho = \{(a,c) \in A \times C \mid (\exists\, b \in B)\,((a,b) \in \rho \wedge (b,c) \in \sigma)\}$$

se nazývá SLOŽENÍ RELACÍ ρ a σ.

ZOBRAZENÍ

__Definice__ Buďte A, B množiny. ZOBRAZENÍ f z množiny A do množiny B je relace $f \subseteq A \times B$, která splňuje: Pro každý prvek $a \in A$ existuje právě jeden prvek $b \in B$ takový, že $(a,b) \in f$.

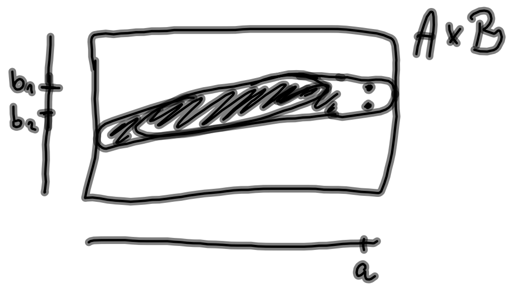
$$(\forall a \in A)(\exists!\, b \in B)((a,b) \in f)$$

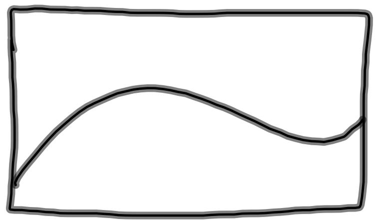
$$b = f(a) = f_a = fa$$

b se nazývá OBRAZ prvku a při f.

$$f : A \longrightarrow B \quad , \quad f : a \longmapsto b$$

Př.:





$$id_A : A \longrightarrow A, \quad a \longmapsto a$$

Tvrzení. Buďte $f : A \to B$, $g : B \to C$ zobrazení. Pak relace $g \circ f$ je zobrazení $A \to C$ a

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \text{ pro každé } a \in A.$$

Důkaz. Buď $a \in A$. $c := \underbrace{g(\underbrace{f(a)}_{\in B})}_{\in C}$

$(a,c) \in g \circ f$, $(a, f(a)) \in f$, $(f(a), c) \in g$

$\Rightarrow$ existence.

Nechť $c \in C$ je takový, že $(a,c) \in g \circ f$. Pak existuje $b \in B$: $(a,b) \in f$ a $(b,c) \in g$.

$\Rightarrow$ jednoznačnost.

Tvrzení (1) $f : A \to B$. Pak $f \circ id_A = id_B \circ f = f$.

(2) $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Pak

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Důkaz. (2) $h \circ (g \circ f) : A \to D$

$(h \circ g) \circ f : A \to D$

$a \in A$

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))) =$$

$$= (h \circ g)(f(a)) = ((h \circ g) \circ f)(a)$$

$f : A \to B$, $b \in B$, $f(a) = b \Rightarrow a$ se nazývá VZOR prvku b při f. $f^{-1}(b) = f^{-1}\{b\} \ni a$

$C \subseteq B$ $\quad f^{-1}(C) = \{ a \in A \mid f(a) \in C \}$

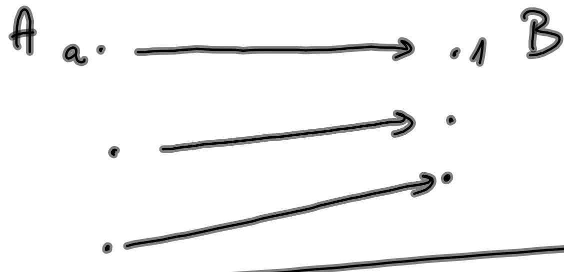
VZOR množiny C při f.

<u>Definice</u> Zobr. $f: A \to B$ se nazývá SURJEKTIVNÍ (SURJEKCE, NA), jestliže každý prvek $b \in B$ má aspoň jeden vzor v A:

$$(\forall\, b \in B)(\exists\, a \in A)(b = f(a)).$$

Zobr. $f: A \to B$ se nazývá INJEKTIVNÍ (INJEKCE, PROSTÉ), jestliže každý prvek $b \in B$ má nejvýše jeden vzor v A:

$$(\forall\, a_1, a_2 \in A)\big(f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2\big).$$



<u>Tvrzení</u> $f: A \to B$ mezi konečnými množinami: A má m prvků, B má n prvků. Pokud $m > n$, pak f není injektivní.

Zobrazení $f: A \to B$ se nazývá BIJEKTIVNÍ, je-li injektivní a surjektivní současně.

<u>Tvrzení</u> $f: A \to B$. Násl. podm. jsou ekvivalentní.

(1) f je bijektivní

(2) existuje zobr. $g: B \to A$ takové, že

$$g \circ f = id_A \quad , \quad f \circ g = id_B .$$

Zobrazení g se nazývá INVERZNÍ k f (f^{-1}).

RELACE EKVIVALENCE

Definice Buď $\rho \subseteq A \times A$. ρ se nazývá

- REFLEXIVNÍ, když $\forall a \in A$ platí $a \rho a$ $\left((a,a) \in \rho\right)$.
- SYMETRICKÁ, když platí $a \rho b \Rightarrow b \rho a$
  $\left((a,b) \in \rho \Rightarrow (b,a) \in \rho\right)$
- TRANZITIVNÍ, když platí $(a \rho b \wedge b \rho c) \Rightarrow a \rho c$
  $\left((a,b) \in \rho \wedge (b,c) \in \rho \Rightarrow (a,c) \in \rho\right)$

Definice Reflexivní, symetrická a tranzitivní relace se nazývá RELACE EKVIVALENCE.